

# Математичне моделювання нелінійного електричного кола

*Рожков Петро Павлович*

*Факультет електропостачання і освітлення міст  
ХНУМГ імені О.М. Бекетова  
Харків, Україна  
e-mail [rozhkov-pp@ukr.net](mailto:rozhkov-pp@ukr.net)*

*Рожкова Світлана Едуардівна*

*Автомобільний факультет  
ХНАДУ  
Харків, Україна  
e-mail [rozhkova.se@gmail.com](mailto:rozhkova.se@gmail.com)*

**Анотація** Запропоновано використовувати метод припасовування для розрахунку струму в послідовному нелінійному електричному колі змінного струму. На першому етапі знаходиться аналітичне розв'язання неоднорідного лінійного диференційного рівняння другого порядку з урахуванням початкових умов для послідовного електричного кола, яке складається з активного опору, індуктивності та ємності. Права частина рівняння представлена гармонійною функцією електрорушійної сили з початковим фазним зсувом. В результаті розв'язання диференційного рівняння за допомогою перетворення Лапласа отримані аналітичні функції залежності заряду, струму та другої похідної заряду від часу для дійсних, кратних та комплексних коренів характеристичного рівняння. Використання методу припасовування дозволяє проводити математичне моделювання процесів в електричному колі з нелінійною характеристикою будь-якого його елемента. На другому етапі розглянуто випадок, коли у якості нелінійного елемента електричного кола використовується котушка з феромагнітним осердям, а активний опір та ємність є лінійними елементами. Феромагнітне осердя суттєво впливає на індуктивність кола і робить його залежним від струму, що тече в колі. Вихідні дані для кривої намагнічування, що характеризує залежність магнітних властивостей матеріалу осердя від струму, представлені як сукупність експериментальних точок. Для отримання аналітичної залежності проведена кубічна сплайн-інтерполяція експериментальних даних. Для аналізу залежності форми та величини струму від виду феромагнетика в якості осердя розглянуті сталь 3411 та сталь 1512. Для аналізу впливу активного опору на форму та величину струму в колі розрахунки проводилися для двох значень активного опору, які розрізняються у десять разів. Отримані графіки залежності струмів від часу для різних феромагнетиків осердя та однакових значень активного опору мають подібну форму, але величини струмів після закінчення перехідного процесу відрізняються іноді в два рази. Найбільший вплив на форму та величину струму справляє величина опору. Форма струму зі збільшенням опору починає наближатися до гармонійної. Це відбувається в наслідок зменшення струму і зменшення варіації індуктивності кола.

**Ключові слова** нелінійне електричне коло, диференційне рівняння, початкові умови, метод припасовування, феромагнітне осердя

## I. ВСТУП

Теорія лінійних електричних кіл досягла великих успіхів у вирішенні практичних задач сучасної електроенергетики. Фактично всі математичні моделі

процесів та об'єктів, що вона пропонує, знайшли свої використання у генерації, передачі та розподіленні електричної енергії. Але існує значна частина електричних процесів та об'єктів, що описуються нелінійними співвідношеннями. До таких об'єктів належать електричні кола, що мають у своєму складі котушки з феромагнітним осердям. Ферорезонансні режими, що виникають в електричних мережах високої напруги в результаті несприятливого поєднання схеми з'єднань та відповідних енергетичних процесів, заслуговують на особливу увагу, оскільки починаються неочікувано, розвиваються стрімко та супроводжуються перенапругами та надструмами. Виникає нагальна проблема у побудові математичної моделі нелінійного електричного кола, яка дозволяє отримати характеристики процесу в аналітичному вигляді [1].

## II. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Розвиток теорії і створення ефективних аналітичних методів дослідження процесів у нелінійних електричних колах – це досить актуальний науковий напрям, що активно розвивається в Україні [2].

Дослідження нелінійних RLC-кіл за допомогою аналітичних методів мають певні особливості [3]. Наприклад, вибір математичного методу для аналізу процесів у колі залежить від вигляду залежності нелінійного елемента. Застосування в рівнянні апроксимаційної залежності нелінійної характеристики елемента RLC-кола у вигляді дрібно-раціональних, логарифмічних, гіперболічних та інших складних функцій вимагають особливого підбору математичного методу для практичного використання. Значною мірою вибір математичного методу обумовлюється виглядом наближеного розв'язку, який є відображенням фізичних властивостей досліджуваної системи.

До того ж, оскільки використання аналітичних методів для аналізу процесів у нелінійних електричних колах пов'язане з великою трудомісткістю, громіздкістю обчислень та складністю розв'язання нелінійних диференційних рівнянь, при ускладненні нелінійних кіл виникає необхідність використання нових математичних методів, можливих для практичного застосування.

Наприклад, у роботі [2] були запропоновані нові аналітичні підходи до аналізу нелінійних електричних кіл, а саме: було запропоновано новий оригінальний метод розрахунку процесів у слабо нелінійних коливальних колах з втратами, що ґрунтується на

розкладанні розв'язків слабо нелінійної системи по розв'язках незбуреної (породжуючої) системи, за допомогою якого було проведено розрахунки кіл з різними нелінійними елементами.

Було проаналізовано коло розряду конденсатора на лінійний опір та індуктивність з феромагнітним осердям. З урахуванням нелінійності потокозчеплення таке коло описується рівнянням

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L_0} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{L_0 C} = \varepsilon \frac{3}{L_0} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 \frac{d^2 q}{dt^2},$$

де  $q$  – величина заряду на конденсаторі;  $R$  – опір навантаження;  $C$  – ємність конденсатора;  $L_0$  – індуктивність, що відповідає лінійному випадку;  $\varepsilon$  – малий параметр.

Розв'язання цього рівняння шукають у класі експоненціальних та тригонометричних функцій.

У роботі [14] розглядалася ділянка електричної мережі, що представлена на fig. 1. Для наведеної схеми рівняння балансу напруги має вигляд

$$u_k + u_c = u.$$

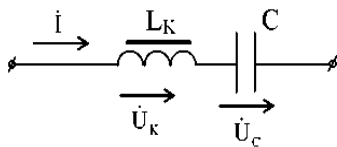


Fig. 1. Послідовне включення реактивних елементів у випадку поздовжньої ємнісної компенсації

Оскільки  $u_k = \frac{d\psi}{dt}$ ;  $u_c = \frac{q}{C}$ , а миттєві значення прикладеної напруги гармонійне, то рівняння буде мати вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{q}{C} = U_{max} \sin \omega t.$$

Розв'язання цього рівняння шукають у класі тригонометричних функцій. З приведених прикладів видно, що розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь шукають для окремих випадків, загального рішення не існує.

Виходом з цієї ситуації вважається чисельне розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь електричного кола, але в цьому разі ми не отримуємо аналітичної функції, а отримуємо сукупність дискретних значень.

Виходячи з цього, пропонується використовувати для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь метод припасовування, який дозволяє, на відміну від чисельних методів, отримати аналітичне рішення для будь-якого виду нелінійності елементів електричного кола.

### III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗАМКНЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

Розглянемо послідовне замкнуте електричне коло, наведене на fig. 2.

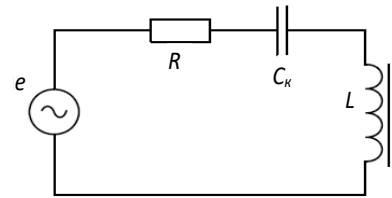


Fig. 2. Послідовне замкнуте електричне коло

Напишемо диференційне рівняння для контуру зображеного на fig. 2

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C_k} = e(t), \quad (1.1)$$

де  $q(t)$  – заряд.

У якості моделі ЕРС прийемо формулу

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi) = E_m (\cos \varphi \cdot \sin \omega t + \sin \varphi \cdot \cos \omega t).$$

Введемо позначення:

$$\alpha = E_m \cdot \cos \varphi;$$

$$\beta = E_m \cdot \sin \varphi.$$

Після підстановки отримаємо наступне рівняння

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C_k} = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t. \quad (1.2)$$

Будемо вважати, що початкові умови не дорівнюють 0.

$$q(0) = q_0;$$

$$q'(0) = q'_0.$$

Для розв'язання рівняння (1.2) будемо використовувати операторний метод [5].

Отримаємо рішення диференційного рівняння (1.2) для дійсних різних коренів  $r_1, r_2$  характеристичного рівняння

$$q(t) = (Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + C \cos \omega t + \frac{D}{\omega} \sin \omega t) / L$$

для комплексних коренів:

$$q(t) = \frac{A}{L} e^{-b_1 t} \cos a_1 t - \frac{Ab_1}{La_1} e^{-b_1 t} \sin a_1 t + \frac{B}{La_1} e^{-b_1 t} \sin a_1 t + C \cos \omega t + \frac{D}{\omega} \sin \omega t;$$

дійсних кратних коренів:

$$q(t) = \frac{A}{L} e^{r_1 t} + \frac{B}{L} e^{r_2 t} + \frac{C}{L} \cos \omega t + \frac{D}{\omega L} \sin \omega t.$$

Значення величин  $A, B, C, D, r_1, r_2, a_1, b_1$  залежать від параметрів електричного кола та початкових умов.

З отриманих рішень визначимо першу  $q'(t)$  та другу  $q''(t)$  похідні.

#### IV. РОЗРАХУНОК СТРУМУ У НЕЛІНІЙНОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ

Застосуємо метод припасовування. Будемо вважати, що на початку процесу початкові умови дорівнюють нулю та впродовж деякого дуже малого часу  $\Delta t$  параметри диференційного рівняння залишаються постійними. В результаті за отриманими формулами можна визначити  $q(\Delta t)$  та її похідні. Ці значення будемо вважати початковими умовами для наступного шагу. Параметри диференційного рівняння змінимо відповідно до вольт-амперної або вебер-амперної характеристики. Після цього проведемо розрахунки нового значення  $q(\Delta t)$  і так далі. Треба вважати на те, що час дії збурюючого впливу поступово збільшується з дискретністю  $\Delta t$ . Точність методу визначається величиною  $\Delta t$ . Таким чином, в результаті отримуємо не тільки сукупність чисел – значень функції  $q(t)$ , але і аналітичну залежність з відповідними параметрами.

Для ілюстрації запропонованого методу розрахунку замкнутого нелінійного електричного кола визначимо струм, що тече в ньому.

Проведемо кубічну сплайн-інтерполяцію кривої намагнічування для сталі 3411 (Э310). Експериментальні точки наведені в табл. 1.

TABLE I. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ТОЧКИ КРИВОЇ НАМАГНІЧУВАННЯ ДЛЯ СТАЛІ 3411 (Э310)

№	1	2	3	4	5
H, А/м	170	220	280	370	500
B, Тл	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
№	6	7	8	9	10
H, А/м	700	1000	2000	4000	9200
B, Тл	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9

Крива намагнічування, що побудована за результатами кубічної сплайн-інтерполяції, представлена на fig. 3.

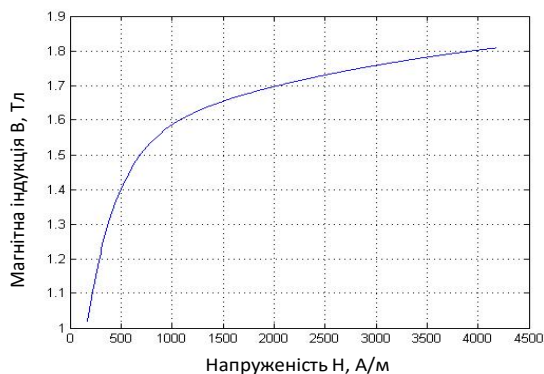


Fig. 3. Крива намагнічування сталі 3411(Э310)

Будемо розглядати випадки, коли активний опір складає  $R = 16$  Ом та  $R = 160$  Ом, а ємність дорівнює  $C = 12.67 \cdot 10^{-6}$  Ф.

За результатами розрахунків на fig. 4 представлена крива струму для випадку, коли  $R = 16$  Ом, а на fig. 5  $R = 160$  Ом.

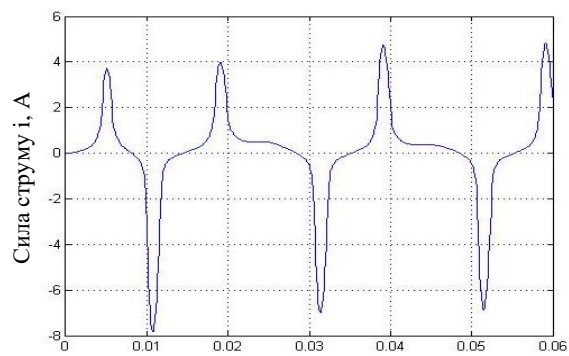


Fig. 4. Струм у колі з активним опором  $R = 16$  Ом.

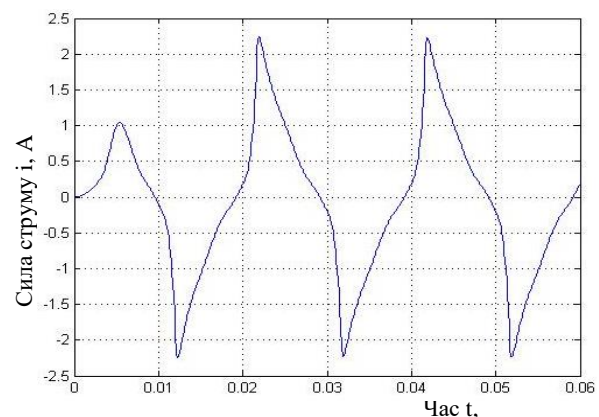


Fig. 5. Струм у колі з активним опором  $R = 160$  Ом.

Аналіз отриманих графіків показує, що форма струму, а отже і спектральний склад, суттєво залежить від величини струму. Вплив перехідного процесу, що відповідає включенню, закінчується приблизно через два періоди, для схеми з більшим активним опором це відбувається швидше.

З метою дослідження впливу феромагнетика на величину та форму струму проведемо такі ж розрахунки для сталі 1512(Э42). Експериментальні точки наведені в табл. 2. Будемо розглядати випадки, коли активний опір складає  $R = 16$  Ом та  $R = 160$  Ом, а ємність  $C = 12.67 \cdot 10^{-6}$  Ф.

TABLE II. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ТОЧКИ КРИВОЇ НАМАГНІЧУВАННЯ ДЛЯ СТАЛІ 1512(Э42)

№	1	2	3	4
H, А/м	96	114	148	192
B, Тл	0,4	0,5	0,6	0,7
№	5	6	7	8
H, А/м	254	325	414	538
B, Тл	0,8	0,9	1,0	1,1
№	9	10	11	12
H, А/м	730	1080	1940	3850
B, Тл	1,2	1,3	1,4	1,5

За результатами розрахунків на fig. 6 представлена крива струму для випадку, коли  $R = 16$  Ом, а на fig. 7  $R = 160$  Ом.

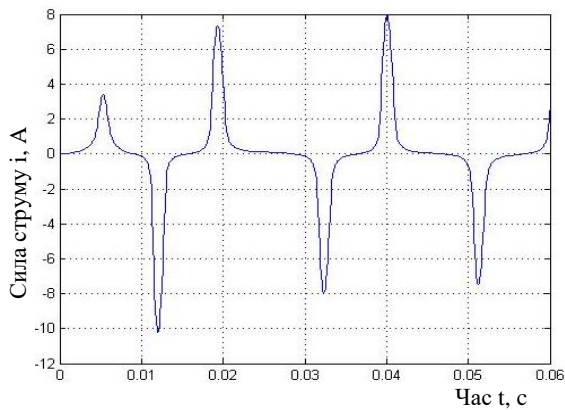


Fig. 6. Струм у колі з активним опором  $R = 16$  Ом.

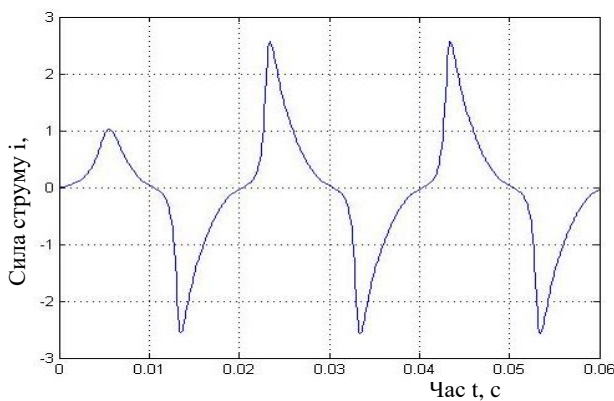


Fig. 7. Струм у колі з активним опором  $R = 160$  Ом

Аналіз отриманих графіків показує, що як і в попередніх графіках, форма струму суттєво залежить від його величини. Вплив перехідного процесу, що відповідає включенню, більш затягнутий для схеми з меншим активним опором.

#### V. ВИСНОВКИ

Проведені дослідження довели ефективність використання методу припасовування для

## Mathematical design of nonlinear electric

P. Rozhkov

O.M. Beketov National University of Urban Economy  
in Kharkiv, Ukraine

S. Rozhkova

Kharkiv National Automobile and Highway University

Keywords a nonlinear electric circle, differential equation, initial conditions, the method of fitting, ferromagnetic core.

Abstract: It is proposed to use the method of attachment for the calculation of current in a sequential nonlinear electric circuit of an alternating current. At the first stage, the analytical solution of the second-order non-uniform linear differential equation is considered, taking into account the initial conditions for a sequential electric circuit, which consists of active resistance, inductance and capacitance. The right-hand side of the equation is represented by the harmonic function of the electromotive force with initial phase shift. As a result of the solution of the differential equation by means of the Laplace transform, was obtained analytic functions of the charge, current, and second derivative charge on time for real, multiple and complex roots of the characteristic equation. The use of the method of attachment allows us to conduct mathematical modeling of processes in an electric circuit with a nonlinear characteristic of any of its elements. In the second stage, the

розрахунку нелінійних кіл. Отримані аналітичні залежності дозволяють проводити розрахунки для усіх видів нелінійних елементів електричних мереж. Розглянуті приклади доводять ефективність використання запропонованого методу для аналізу процесу виникнення ферорезонансу в послідовних електричних колах.

#### VI. ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Ганус А.И. Экспериментальное определение границ областей возможных затухающего и незатухающего феррорезонансных процессов в электрических сетях с изолированной нейтралью с трансформаторами напряжения // Світлотехніка та електроенергетика. – 2006. - № 7-8. с. 77-85.
- [2] Шидловська Н.А., Васецкий Ю.М., Мислович М.В., Хімюк І.В. Сучасні інформаційні технології у вирішенні задач електротехніки та підвищення надійності електротехнічного обладнання // Технічна електродинаміка. -2011. - №6, - С. 55 - 70.
- [3] Шидловська Н.А., Самойленко В.Г. Про деякі задачі нелінійної електротехніки і математичні методи їх дослідження // Технічна електродинаміка. - 2008. - №5, - С. 3 - 11.
- [4] Б.Т. Кононов, Е.А. Кононова, А.А. Мушаров Феррорезонанс в електричних сетях с поперечной и продольной компенсацией потерь напряжения Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил, 2012, випуск 1(30) - С.144 - 146.
- [5] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544с.

◆ case of using a reel with ferromagnetic core as a nonlinear element of the electric circuit is considered, and the active resistance and capacitance are linear elements. The ferromagnetic core significantly influences the inductance of the circle and makes it dependent on the current flowing in the circle. Output data for the magnetization curve characterizing the dependence of the magnetic properties of the core material on the current are presented as a set of experimental points. To obtain an analytic dependence, a cubic spline-interpolation of experimental data was performed. For the analysis of the dependence of the shape and value of the current on the type of ferromagnet as a core, steel 3411 and steel 1512 are considered. For the analysis of the influence of the active resistance on the form and the value of the current in the circle, calculations were made for two values of the active resistance, which differ tenfold. The obtained graphs of time-dependent currents for different core ferromagnets and the same values of active resistance have the same form, but the magnitudes of currents after the end of the transition process differ sometimes in two times. The greatest influence on the shape and magnitude of the current is the value of the resistance. The shape of the current with increasing resistance begins to approach harmonious. This is due to a decrease in the current and a decrease in the variation of the inductance of the circle. ◆