

Проходження гауссового пучка крізь квадратично-неоднорідну призму

А.С.Сисоєв

факультет «Електропостачання і освітлення міст»

ХНУМГ ім. О.М. Бекетова

Харків, Україна

61002, Україна, Харків, вул. Маршала Бажанова, 17

Анотація – Показано, що при нахиленому падінні гауссового пучка на квадратичне середовище з довільно орієнтованою віссю неоднорідності енергія пучка переноситься вздовж осі неоднорідності, а фаза – вздовж напрямку, який складає деякий кут з віссю неоднорідності. Найбільш суттєвим параметром задачі є відношення радіуса падаючого пучка у горловині і радіуса власної моди квадратичного середовища. Аналіз поля пучка проведено як функція цього параметру. Показано, що радіус пучка у квадратичному середовищі при нахиленому падінні пучка на межу розподілу змінюється з періодом таким же, як і у випадку нормального падіння, нормального падіння осі неоднорідності і розташування горловини пучка на межі розподілу. Доведено, що при осевому падінні на межу розподілу (падаючий пучок поширюється вздовж осі неоднорідності) параметри хвильового пучка у квадратичному середовищі не залежать від кута падіння. Квадратичне середовище каналізує падаючий хвильовий пучок, заставляючи його поширюватися вздовж осі неоднорідності. При цьому параметри пучка періодично змінюються.

Радіус хвильового пучка коливається між двома екстремальними значеннями, які залежать від положення горловини, кута падіння та орієнтації осі неоднорідності. Радіус кривини хвильової поверхні в перерізах з екстремальними радіусами пучка обертається у нескінченність (хвильові поверхні пласкі). При певних умовах за квадратичним шаром утворюється горловина, подібно тому, як це буває при проходженні пучка крізь збиральну лінзу з великою оптичною силою. Введено параметр, який описує вплив неоднорідності середовища на зміну розбіжності пучка. Показано, що розбіжність пучка у квадратичному середовищі періодично змінюється.

У заключенні відзначимо, що знаючи параметри хвильового пучка, який пройшов квадратичний шар, можливо розрахувати параметри відкритого сферичного резонатора, який містить шар квадратичного діелектрика.

Ключові слова - пучок, квадратичне середовище, радіус пучка, осциляції.

I. ВСТУП

Практично часто середовище буває неоднорідним. Одним з зручних методів розв'язання задач поширення хвиль в неоднорідних середовищах є метод апроксимації функції діелектричної проникності поліномом. Обмежуючись поліномом другого порядку,

приходимо до так званих квадратичних середовищ, які широко використовуються для теоретичного моделювання реальних неоднорідних середовищ. В розглянуто осеве поширення гауссових хвильових пучків у квадратично неоднорідних середовищах з заданим розподілом у де-якій площині, у - поза осеве поширення пучків, яке базується на розкладанні первісного розподілу по модам квадратичного середовища.

У даній роботі розглядається проходження хвильового пучка межі розділу однорідного діелектрика з квадратично-неоднорідним діелектриком при довільному куті падіння пучка і довільній орієнтації осі неоднорідності.

II. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Неоднорідність діелектричної проникності у області 2 (квадратично-неоднорідний діелектрик) задаємо у вигляді

$$\varepsilon_2(x_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_x \cdot x_2^2, \quad (1)$$

де вісь неоднорідності складає кут φ_1' з нормаллю до 1-ої границі розділу. Вісь неоднорідності і вісь падаючого пучка Z_1 перетинаються у одній точці 1-ої границі розділу (рис.1). Цей випадок падіння пучка на квадратично-неоднорідне середовище будьмо називати нахиленим падінням без зміщення.

У квадратичному середовищі зміна варіансу пучка описується формулою (1)

$$V_2(z_2) = \frac{V_2(0)\cos(z_2/V_c) + iV_c \sin(z_2/V_c)}{V_c \cos(z_2/V_c) + iV_2(0)\sin(z_2/V_c)}, \quad (2)$$

де

$$V_c = n_2 / \varepsilon_x^{1/2} \quad (3)$$

$$n_2 = \left[\varepsilon_2 - \varepsilon_x^{1/2} (2p+1)k_0 \right] \quad (4)$$

Показник заломлення (4) є ефективним показником заломлення квадратично- неоднорідного середовища і саме його потрібно підставляти в формули для визначення параметрів гауссового пучка у квадратичному середовищі.

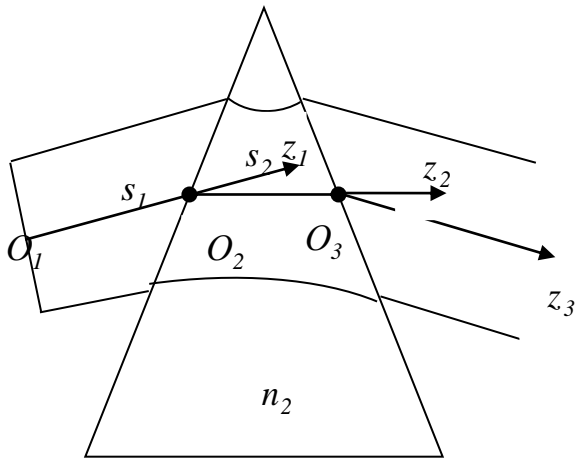


Fig. 1. Геометрія задачі.

Значення варіанса на межі $V_2(0)$ визначається із формули

$$V_2(0) = \frac{n_2}{n_1} V_1(s_1) t_1^2, \quad (5)$$

де

$$t_1 = \cos \varphi'_1 / \cos \varphi_1,$$

φ_1 - кут падіння в області 1, φ'_1 - кут заломлення,

S_1 - геометричний шлях пучка у 1-му середовищі.

Величина t_1 описує зміну напрямку поширення пучка на 1-й межі розподілу. Межі розподілу між двома областями надається індекс середовища з меншим порядковим номером. Формулу (5) можливо розглядати, як правило перетворення для варіансу гауссового пучка на плоскій межі розділу двох однорідних середовищ.

Поле гауссового хвильового пучка у будь-якій з областей ($j = 1, 2, 3$) можливо записати у вигляді

$$u^{(j)} = A_j \Psi_p(x_j, z_j) \exp(i\Phi_j(z_j)) \quad (6)$$

де A_j - амплітуда, що визначає енергію, яка переноситься пучком, (x_j, z_j) - променеві системи координат, центр координат O_1 знаходиться у горловині падаючого пучка, O_2 і O_3 - на границях області 2. Функція $\Phi_j(z_j)$ визначає частину фази пучка, яка співпадає з фазою плоскої хвилі

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{m=1}^{j-1} k_m s_m + k_j z_j, \quad (7)$$

де $k_j = n_j k_0$, $k_0 = \omega/c$. Функція $\Psi_p(x_j, z_j)$ описує відмінність поля пучка від поля плоскої хвилі і має вигляд

$$\Psi_p(x_j, z_j) = \sigma_j(z_j) H_p \left(\sqrt{\frac{k_j}{w_j}} x_j \right) \times \quad (8)$$

$$\exp(-k_j x_j^2 / 2V_j + i\varphi_j(z_j))$$

де $H_p(x)$ - поліном Ерміта p -го порядку.

Поле (6) у області 2 задовольняє умові безперервності функцій $\Psi_p(x_j, z_j)$ на межі розділу. Крім того для задовільнення граничних умовам постійні поширення вздовж межі розділу у двох сусідніх областях повинні бути рівними. Коли область 2 однорідна, це виконується автоматично, т. я. кути φ_1 і φ'_1 пов'язані законом заломлення. Для квадратично неоднорідного середовища кут φ'_1 визначає напрям осі неоднорідності і тому записані у вигляді (6) поля не задовольняють умові рівності сталих поширення вздовж 1-ї границі розділу. Для того, щоб ця рівність виконувалася потрібно поле у квадратичному середовищі, що визначається формулою (6), помножити, як це впливає з [3] на $\exp(ik_2 \delta x_2)$, де

$$\delta = \frac{n_1 \sin \varphi_1 - n_2 \sin \varphi'_1}{n_2 \cos \varphi'_1}, \quad (9)$$

Тобто поле у квадратичному середовищі має вигляд

$$u^{(2)} = A_2 \Psi_p(x_2, z_2) \times \quad (10)$$

$$\exp i[k_1 s_1 + k_2 (z_2 + \delta x_2)]$$

Таким чином, як це звичайно і буває у анізотропних середовищах, напрямки хвильової і променевої нормалей гауссового пучка при його нахиленому падінні не співпадають. Променева нормаль, вздовж якої переноситься енергія, співпадає з віссю неоднорідності, а хвильова нормаль, вздовж якої поширюється фаза пучка, складає з віссю неоднорідності кут $\alpha = \text{tg } \delta$. При $\varepsilon_x = 0$ область 2 однорідна, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$, кут φ'_1 стає кутом заломлення хвильового пучка, а параметр $\delta = 0$.

Амплітуда відбитого і заломленого хвильових пучків визначається формулами для коефіцієнтів Френеля з n_2 за формулою (4).

Для прозорих квадратичних середовищ V_c дійсна величина і представляючи її у вигляді

$$V_c = k_2 \rho_c^2 / 2, \quad (11)$$

де ρ_c - радіус пучка власної моди квадратичної системи, для параметрів хвильового пучка в області 2 отримаємо

$$a_2 = (n_2 / n_1) a_1 D(z_2) t_1^2, \quad (12)$$

$$b_2(z_2) = a_2(z_2) \beta_2(z_2), \quad (13)$$

$$\beta_2(z_2) = \frac{1}{2} \mu^2 \mu_- \sin(2z_2 / V_c) + \beta_1(s_1) \cos(2z_2 / V_c) \quad (14)$$

$$D(z_2) = [1 + \beta_1^2(s_1)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(z_2 / V_c) + \\ + \mu^2 \sin^2(z_2 / V_c) - \\ - \beta_1(s_1) \cos(z_2 / V_c) \end{array} \right\}^{-1} \quad (15)$$

$$\mu = \xi [1 + \beta_1^2(s_1)]^{1/2} t_1, \quad (16)$$

$$\mu_{\pm} = \mu^{-4} [1 + \beta_1^2(s_1)] \pm 1$$

Найбільш суттєвим параметром в формулах (12) - (16) є

$$\xi = \rho_o / \rho_c, \quad (17)$$

який визначає співвідношення між радіусом ρ_o падаючого пучка в горловині і радіусом ρ_c власної моди квадратичного середовища.

Параметр

$$\mu = \rho_2(0) / \rho_c, \quad (18)$$

де

$$\rho_2(0) = \rho_o [1 + \beta_1^2(s_1)]^{1/2} t_1 \quad (19)$$

визначає співвідношення між радіусом пучка $\rho_2(0)$ на вході в квадратичне середовище і радіусом ρ_c власної її моди. Формула (14) визначає хвильовий параметр пучка у квадратичному середовищі. При $\rho_c \rightarrow \infty$ формула (14) переходить у формулу для однорідного середовища, а $D(z_2) = 1$.

Для зручності аналізу є доречним величини V_c і n_2 виразити через

$$V_c = n_2 a_o / \xi^2 \quad (20)$$

$$n_2 = \left[\varepsilon_2 - \frac{2\rho + 1}{k_o a_o} \xi^2 \right]^{1/2} \quad (21)$$

де $a_o = k_o \rho_o^2 / 2$. Тоді можливо провести аналіз поля пучка як функції параметра ξ .

Радіус пучка у квадратичному середовищі визначається формулою

$$\rho_2^2(z_2) = \rho_2^2(0) D(z_2), \quad (22)$$

а для радіуса кривини хвильової поверхні пучка отримуємо

$$R_2(z_2) = \frac{k_2 \rho_2^2(z_2)}{2\beta_2(z_2)} = \frac{W_2(z_2)}{\beta_2(z_2)} \quad (23)$$

Підстановка (14), (15) в (22) і наступні перетворення призводять до кінцевої формули для радіуса пучка у квадратичному середовищі

$$\rho_2^2(z_2) = \rho_2^2(0) \left[\begin{array}{l} 1 + \mu_- \sin^2(z_2 / V_c) + \\ + \mu^{-2} \beta_1(s_1) \sin(2z_2 / V_c) \end{array} \right] \quad (24)$$

Як видно з (24) радіус пучка у квадратичному середовищі при нахиленому падінні пучка на границю розділу змінюється з періодом

$$L = \frac{1}{2} \pi k_o n_2 \rho_c^2 \quad (25)$$

таким ж, як і у випадку нормального падіння пучка, нормального напрямку осі неоднорідності і розташуванні горловини на границі розділу. Таким чином, період зміни радіуса пучка у квадратичному середовищі визначається тільки радіусом ρ_c власної моди квадратичного діелектрика, ефективним показником заломлення n_2 квадратичного середовища, частотою K_o і не залежить від положення горловини падаючого пучка, кута падіння і орієнтації осі неоднорідності.

При співвісному падінні пучка на межу розділу (падаючий пучок поширюється вздовж осі неоднорідності) $\varphi_1 = \varphi'_1$, $t_1 = 1$ і параметри хвильового пучка у квадратичному середовищі не залежать від кута падіння. Від кута падіння при цьому залежать тільки коефіцієнти відбиття і проходження.

Осциляції радіуса пучка у квадратичному середовищі носять складний характер і суттєво залежать від розташування горловини падаючого пучка. Якщо горловина лежить на межі розділу ($\beta_1 = 0$) осциляції радіуса пучка носять квадратично синусоїдальний характер ($\sim \sin^2(z_2 / V_c)$). При $\mu_- = 0$ (тобто $\mu^4 = 1 + \beta_1^2(s_1)$) осциляції пучка носять чисто синусоїдальний характер (\sim

$\sin(2z_2/V_c)$). В загальному випадку осциляції радіуса пучка уявляють собою накладання цих двох видів осциляцій. Таким чином, квадратичне середовище каналізує падаючий пучок, заставляючи його поширюватися вздовж осі неоднорідності, при цьому параметри пучка періодично змінюються.

Радіус пучка ρ_2 з періодом L коливається між двома екстремальними значеннями

$$\rho_{2\pm}^2 = \frac{1}{2} \rho_2^2(0) \left[\mu_{\pm} \pm \sqrt{\mu_{\pm}^2 + 4\mu^{-4} \beta_1^2(s_1)} \right], \quad (26)$$

які залежать від розташування горловини, кута падіння і орієнтації осі неоднорідності. Радіус кривини хвильової поверхні в перерізах з екстремальними радіусами пучка обертається у нескінченність (хвильові поверхні плоскі).

В області 3 (за квадратичним шаром) параметри a_3 і b_3 приймають значення

$$a_3 = \frac{n_3}{n_2} a_2(s_2) t_2^2, \\ b_3(z_3) = a_3 \beta_2(s_2) + z_3, \quad (27)$$

де S_2 - довжина шляху пучка у квадратичному середовищі, яку виміряно вздовж осі неоднорідності, $t_2 = \cos \varphi_2' / \cos \varphi_2$, φ_2 - кут, який складає вісь неоднорідності з нормаллю до 2-ої межі розділу, φ_2' - кут заломлення на 2-ій межі розділу. Кут заломлення φ_2' для пучка, який пройшов квадратичний шар, визначається з рівності сталих поширення вздовж 2-ої межі розділу

$$n_3 \sin \varphi_2' = n_2 (\sin \varphi_2 + \delta \cos \varphi_2) \quad (28)$$

Для плоско паралельного квадратичного шару $\varphi_1' = \varphi_2$ і з (28) $n_3 \sin \varphi_2' = n_1 \sin \varphi_1$, тобто кут заломлення φ_2' після квадратичного шару такий же, як і для однорідного плоско паралельного шару і якщо $n_3 = n_1$, то $\varphi_2' = \varphi_1$, тобто хвильовий пучок, що пройшов плоско паралельний квадратичний шар, поширюється паралельно падаючому.

Passing of gaussian bunch through quadratically-heterogeneous prism

A.S. Sysoiev

Faculty of Electricity and Lighting of cities
O.M.Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv,
17, Marshal Bazhanov Street,
Kharkiv, 61002, Ukraine.

Якщо $b_3(0) \neq 0$, то за квадратичним шаром утворюється горловина в перерізі з координатою

$$z_3 = -a_3 \beta_2(s_2) \quad (29)$$

При цьому фокусує дія квадратичного шару така велика, що призводить до утворення горловини за шаром, аналогічно як це буває при проходженні пучка крізь збиральну лінзу з великою оптичною силою.

Розбіжність Θ пучка у кожній з областей ($j = 1, 2, 3$) визначається формулою

$$\Theta_j = (2/k_j a_j)^{1/2} \quad (30)$$

Зміна розбіжності пучка, який пройшов квадратичний шар, дорівнює

$$\Theta_3 / \Theta_1 = (n_1 / n_2 t_2 t_1) (D(s_2))^{-1/2} \quad (31)$$

Для однорідного шару $D(s_2) = 1$. Отже фізичний сенс параметра $D(s_2)$ полягає в тому, що він описує вплив неоднорідності середовища на зміну розбіжності пучка. Внаслідок того, що $D(s_2)$ періодична функція товщини S_2 квадратичного шару, то і розбіжність пучка, що пройшов призму, періодично змінюється з збільшенням товщини S_2 .

III. ВИСНОВКИ

У заключенні відзначимо, що знаючи параметри хвильового пучка, який пройшов квадратичний шар, можливо розрахувати параметри відкритого сферичного резонатора, який містить шар квадратичного діелектрика.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Fedorov F.I / F.I Fedorov, V.V Filippov // Reflection and refraction of light transparent crystals. - Minsk; Science and Technology, 1976.
- [2] Goncharenko AM / A.M. Goncharenko // Gaussian beams of light. - Minsk; Science and Technology 1977.
- [3] Deschamps J. / J. Deschamps, P. Mast // Coll. "Quasioptics". - Moscow. World, 1966 - p. 198-209.

Passing of wave bunch is in-process examined through the border of division of homogeneous dielectric with quadratically heterogeneous at arbitrary coal of falling of bunch and arbitrary orientation of axis of heterogeneity.

The parameters of wave bunch are certain in a quadratically-heterogeneous environment. The most substantial parameter of task is a relation of radius of falling bunch in a mouth and radius of own fashion of quadratic environment.

It is shown that the radius of bunch in a quadratic environment at the sloping falling on the border of division changes with a period, the same as well as in case of the normal falling, normal direction of axis of heterogeneity and location of mouth of bunch on the border of division.

At the axial falling on the border of division (a falling bunch spreads along the axis of heterogeneity) the parameters of wave bunch in a quadratic environment do not depend on the angle of incidence. From the angle of incidence here the coefficients of reflections and refractions depend only.

Thus, a quadratic environment ducts a falling wave bunch, compelling him to spread along the axis of heterogeneity and here the parameters of bunch change periodically.

The radius of wave bunch hesitates between two extreme values that depend on position of mouth, angle of incidence of bunch and orientation of axis of heterogeneity.

At certain terms a mouth appears after a quadratic layer, like that as it is at passing of bunch through a collecting lens with large optical force. A parameter that describes influence of heterogeneity of environment on the change of the divergence of bunch is entered. It is shown that divergence of bunch in a quadratically heterogeneous environment changes periodically.

The radius of wave bunch hesitates between two extreme values, that depend on position of mouth, angle of incidence and orientation of axis of heterogeneity. At certain terms a mouth appears after a quadratic layer, like that, as it is at passing of bunch through a collective lens with large optical force. A parameter that describes influence of heterogeneity of environment on the change of divergence of bunch is entered. It is shown that divergence of bunch in a quadratic environment changes periodically.

Прохождение гауссового пучка через квадратично-неоднородную призму

А. С. Сысоев

факультет «Электроснабжения и освещения городов»

ХНУГХ им. А.Н. Бекетова

Харков, Украина

61002, Украина, Харьков, ул. Маршала Бажанова, 17

Рассмотрено прохождение волнового пучка через границу раздела однородного диэлектрика с квадратично-неоднородным при произвольном угле падения пучка и произвольной ориентации оси неоднородности. Показано, что направления волновой и лучевой нормалей пучка в квадратично-неоднородной среде при его наклонном падении на границу не совпадают. Лучевая нормаль, вдоль которой переносится энергия, совпадает с осью неоднородности, волновая нормаль, вдоль которой распространяется фаза пучка, составляет некоторый угол с осью неоднородности. Определены параметры волнового пучка в квадратично-неоднородной среде. Наиболее существенным параметром задачи есть соотношение между радиусом падающего пучка в горловине и радиусом собственной моды квадратичной среды. Анализ поля пучка проведен как функция этого параметра.